68-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2020 m.)

9 klasė (užduotys ir sprendimai)

1. Automobilis važiuoja greitkeliu pastoviu greičiu v_0. Kai laikrodis rodo laiką t_1 = 12 h 16 min, greitkelis baigiasi, ir automobilis pradeda važiuoti asfaltuotu keliu. Šiame kelyje automobilio greitis sumažėja n_1 = 1,4 karto. Nuvažiavus asfaltuotu keliu atstumą ℓ = 6 km, prasideda kelio remontas, dėl ko greitis sumažėja n_2 = 4,2 karto (lyginant su greičiu greitkelyje). Nuvažiavus dar atstumą ℓ, remontas baigiasi ir automobilis vėl išvažiuoja į greitkelį, kuriame juda pradiniu greičiu v_0. Išvažiuojant į greitkelį, laikrodis rodo laiką t_2 = 12 h 32 min. a) Kokiu greičiu v_0 važiuoja automobilis greitkelyje? b) Kokį laiką t rodo laikrodis, automobiliui įvažiuojant į remontuojamą kelio ruožą? c) Nubraižykite automobilio nuvažiuoto kelio priklausomybės nuo laiko grafiką, jam važiuojant asfaltuoto ir remontuojamo kelio ruožais.

Sprendimas

Pagal sąlygą greitis asfaltuotame kelyje: $v_1 = \dfrac{v_0}{n_1}$. (1) (1 taškas)

Remontuojamame kelyje: $v_2 = \dfrac{v_0}{n_2}$. (2) (1 taškas)

Atstumą 2ℓ automobilis nuvažiuoja per laiką t_2 - t_1:

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2}. \quad (3) \quad \text{(1 taškas)}$$

(1) ir (2) lygtis įrašę į (3), gauname: $v_0 = \dfrac{l(n_1 + n_2)}{t_2 - t_1}$. (1 taškas)

v_0 = 126 km/h. (1 taškas)

Įvažiuojant į remontuojamą kelio ruožą, laikrodis rodys laiką:

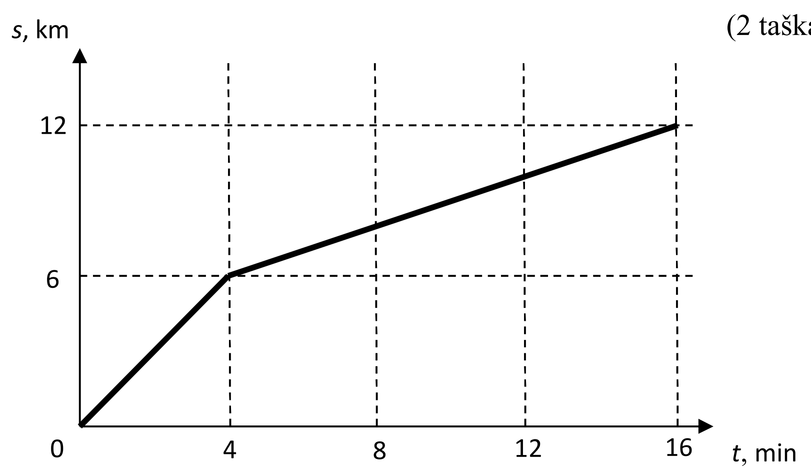
Įrašę į šią lygtį (1) lygtį ir v_0 vertę, gauname: $t = t_1 + \dfrac{l}{v_1}$. (1 taškas)

$$t = t_1 + \frac{n_1}{n_1 + n_2}(t_2 - t_1). \quad \text{(1 taškas)}$$

t = 12 h 20 min. (1 taškas)

Braižome kelio priklausomybės nuo laiko grafiką:

(2 taškai)



2. Į du vienodus indus iki viršaus pripilama to paties nežinomo skysčio. Į pirmąjį indą atsargiai įleidžiamas ρ_1 tankio kubas, o į antrąjį – ρ_2 tankio kubas. Antrojo kubo linijiniai matmenys du kartus didesni, nei pirmojo. Žinoma, kad abiem atvejais indo su skysčiu ir pilnai panirusiu kubu masės yra vienodos. Apskaičiuokite nežinomo skysčio tankį ρ_x.

Sprendimas

Tegul V_0 – pradinis skysčio tūris, V_1 – pirmojo kubo tūris, V_2 – antrojo kubo tūris.

Kadangi antrojo kubo linijiniai matmenys du kartus didesni, tai $V_2 = 8V_1$. (2 taškai)

Abiem atvejais bendros masės yra vienodos, todėl galima užrašyti:

$$\rho_1 V_1 + \rho_x(V_0 - V_1) = \rho_2 8V_1 + \rho_x(V_0 - 8V_1).$$ (5 taškai)

Iš čia gauname:

$$\rho_x = \frac{8\rho_2 - \rho_1}{7}.$$ (3 taškai)

3. Vienalytis strypas padėtas ant horizontalaus stalo taip, kad 1/4 jo ilgio dalis yra išlindusi už stalo krašto. Sunkiausias krovinys, kurį prikalbinus prie išlindusio strypo galo, strypas dar išlieka pusiausviras, yra m = 3 kg. Pastūmus strypą taip, kad už stalo krašto lieka išlindusi 1/12 strypo dalis, ant išlindusio galo pakabinamas m_1 = 2 kg masės, V = 15 ℓ tūrio kibiras. Kiek daugiausiai vandens galima įpilti į kibirą, kad strypas išliktų pusiausviras. Vandens tankis $\rho = 10^3$ kg/m^3.

Sprendimas

Tegul strypo ilgis ℓ, masė M.

Užrašome momentų taisyklę stalo krašto atžvilgiu:

$$\tfrac{1}{4}Mg\ell = \tfrac{1}{4}mg\ell. \qquad (1)$$ (3 taškai)

Apskaičiuokime, kokios masės krovinį m_x galima prikabinti prie strypo galo, pastūmus strypą.

Šiuo atveju momentų taisyklė stalo krašto atžvilgiu:

$$\frac{5}{12}Mg\ell = \frac{1}{12}m_x g\ell. \qquad (2)$$ (2 taškai)

Iš (1) ir (2) lygčių, gauname:

$$m_x = 5m. \qquad m_x = 15 \text{ kg}.$$ (2 taškai)

Vadinasi, strypo gale galima pakabinti 15 kg masės krovinį. Kadangi kibiro masė 2 kg, tai į kibirą galima įpilti m_v = 13 kg vandens (13 ℓ). (3 taškai)

4. Ruošiant V = 200 ℓ talpos vonią sumaišomas šaltas ir karštas vanduo, tuo pačiu metu tekantis iš dviejų vienodų čiaupų. Kokį tūrį šalto $V_š$ ir karšto V_k vandens reikia sumaišyti, kad vonioje būtų t = 54 °C temperatūros vanduo? Žinoma, kad jei šalto vandens čiaupas atidarytas 2/3 dalimi, o karšto vandens čiaupas 1/4 dalimi, tai vonioje esančio vandens temperatūra būtų t_1 = 30 °C. Jei čiaupai atidaryti atvirkščiai (šalto 1/4 dalimi, karšto 2/3 dalimi), tai vandens temperatūra vonioje t_2 = 60 °C. Šilumos nuostolių nepaisykite, šalto ir karšto vandens tankis ρ vienodas.

Sprendimas

Tegul pilnai atidarius čiaupą per laiko vienetą išbėga vandens masė m_0, o vonia užpildoma per laiką τ. Iš čiaupo bėgančio šalto vandens temperatūra $t_š$, karšto – t_k.

Tada pirmuoju atveju vonioje bus $m_{š1}$ šalto vandens masė ir m_{k1} karšto vandens masė.

Pagal šilumos balanso lygtį galime parašyti:

$$cm_{k1}(t_k - t_1) = cm_{š1}(t_1 - t_š). \qquad (1)$$

(2 taškai)

Atsižvelgę į tai, kad $m_{š1} = \frac{2}{3}m_0\tau$, o $m_{k1} = \frac{1}{4}m_0\tau$, (1) lygtį galime perrašyti:

$$\frac{1}{4}(t_k - t_1) = \frac{2}{3}(t_1 - t_š). \qquad (2)$$

(1 taškas)

Analogiškai antruoju atveju:

$$\frac{2}{3}(t_k - t_2) = \frac{1}{4}(t_2 - t_š). \qquad (3)$$

(1 taškas)

Iš (2) ir (3) lygčių gauname:

$$t_k = \frac{8t_2 - 3t_1}{5}. \qquad (4)$$

(1 taškas)

$$t_š = \frac{8t_1 - 3t_2}{5}. \qquad (5)$$

(1 taškas)

Užpildant vonią norimos temperatūros vandeniu, šilumos balanso lygtį galime parašyti taip:

$$c\rho V_k(t_k - t) = c\rho V_š(t - t_š)$$

(1 taškas)

arba:

$$V_k(t_k - t) = V_š(t - t_š). \qquad (6)$$

(1 taškas)

Pagal sąlygą:

$$V_k = V - V_š. \qquad (7)$$

(7) lygtį įrašę į (6) ir atsižvelgę į (4) ir (5) lygtis, gauname:

$$V_š = V\frac{8t_2 - 3t_1 - 5t}{11(t_2 - t_1)}, \quad V_k = V\frac{3t_2 - 8t_1 + 5t}{11(t_2 - t_1)}$$

(1 taškas)

$$V_š \approx 73\ \ell, \qquad V_k \approx 127\ \ell.$$

(1 taškas)

68-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2020 m.)
10 klasė (užduotys ir sprendimai)

1. Sportininkai bėga tiesiu keliu greičiu v išsirikiavę vorele, kurios ilgis L. Tiesiai į juos tuo pačiu keliu greičiu u bėga treneris ($v > u$). Kiekvienas sportininkas iš vorelės jam tik susilyginus su treneriu, pasuka tokiu pačiu greičiu v atgal. 1) Koks bus vorelės ilgis l, kai visi sportininkai pasuks atgal? 2) Koks bus šis ilgis l', jei sportininkas iš vorelės jam tik susilyginus su treneriu, pradeda bėgti greičiu u, bet ta pačia kryptimi kaip iki susitikimo su treneriu?

Sprendimas

1) Jei persikeltume į sistemą, nejudamai surištą su treneriu, tai joje sportininkai į trenerį judėtų greičiu $(v+u)$. (2 taškai)

Tuomet laikas, kuris praeina nuo momento, kai pirmasis sportininkas susilygina su treneriu, iki momento, kai su treneriu susilygina paskutinis vorelės sportininkas, lygus

$$t = \frac{L}{v+u}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Minėtoje sistemoje po susitikimo su treneriu sportininkų vorelė trenerio atžvilgiu juda greičiu $(v-u)$. Tuomet visa vorelė pradės judėti atgal, jei per laiką t įveiks atstumą l (tai ir yra naujas vorelės ilgis), t. y.

$$l = \frac{v-u}{v+u}\cdot L. \qquad \text{(2 taškai)}$$

2) Šiuo atveju minėtoje sistemoje po susitikimo su treneriu sportininkų vorelė trenerio atžvilgiu juda greičiu $(u+u) = 2u$. (2 taškai)

Tuomet visa vorelė per laiką t įveiks atstumą l' (tai ir yra naujas vorelės ilgis antruoju atveju), t. y.

$$l' = \frac{2u}{v+u}\cdot L. \qquad \text{(2 taškai)}$$

2. Į kalorimetrą įpilama dviejų skirtingų temperatūrų skysčių. Išmatavus skysčių pradines ir nusistovėjusias temperatūras paaiškėjo, jog skirtumas tarp šiltesnio skysčio pradinės ir jų abiejų nusistovėjusios temperatūros yra 3 kartus mažesnis, nei abiejų skysčių pradinių temperatūrų skirtumas. Nustatykite į kalorimetrą įpiltų šiltesnio ir šaltesnio skysčių masių santykį m_1/m_2, jeigu jų savitosios šiluminės talpos yra c_1 ir c_2. Šilumos nuostolių nepaisykite

Sprendimas

Pažymėkime pradinę šiltesnio skysčio temperatūrą t_1, šaltesnio skysčio temperatūrą t_2 bei abiejų skysčių nusistovėjusią temperatūrą t. Iš sąlygos gauname:

$$t_1 - t_2 = 3(t_1 - t), \qquad \text{(1 taškas)}$$

iš čia išreiškiame nusistovėjusią temperatūrą:

$$t = \frac{2t_1 + t_2}{3}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Užrašę šiluminio balanso lygtį

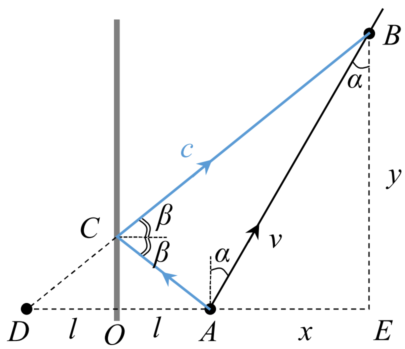
$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2), \qquad \text{(2 taškai)}$$

apskaičiuojame ieškomą masių santykį:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2}{c_1}\frac{t - t_2}{t_1 - t} = \frac{c_2}{c_1}\frac{\frac{1}{3}(2t_1 + t_2 - 3t_2)}{\frac{1}{3}(3t_1 - 2t_1 - t_2)} = \frac{c_2}{c_1}\frac{2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = 2\frac{c_2}{c_1}. \qquad \text{(5 taškai)}$$

3. Automobilis pastoviu greičiu v važiuoja tiesiu horizontaliu keliu toldamas nuo aukštos ilgos sienos, jo greičio kryptis sudaro $\alpha = 30°$ laipsnių kampą su sienos plokštuma. Būdamas atstumu l nuo sienos, vairuotojas paleidžia trumpą garso signalą. Po kiek laiko jis išgirs nuo sienos atsispindėjusį aidą, jeigu garso greitis ore lygus c?

Sprendimas



Nubraižome brėžinį: tegu vairuotojas paleidžia garso signalą taške A, o išgirsta aidą taške B. Tai reiškia, jog per laiką t, kol automobilis nuvažiuoja šį atstumą, garso banga nusklido link sienos, atsispindėjo nuo jos taške C taip, kad kritimo ir atspindžio kampai būtų tarpusavyje lygūs, ir toliau nusklido link taško B. (2 taškai)

Kadangi trikampiai ACO ir DCO yra lygūs, nagrinėdami garso sklidimą kelią ACB galime pakeisti tiesią to paties ilgio linija DCB. Tada $AB = vt$, $DB = ct$, ir stačiajam trikampiui DEB pritaikę Pitagoro teoremą galime užrašyti:

$$(ct)^2 = (2l + x)^2 + y^2 .$$ (2 taškai)

Pakėlę kvadratu bei atsižvelgę į tai, jog $x^2 + y^2 = AB^2 = (vt)^2$, (1 taškas)

o ilgis $x = AB \sin 30° = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} vt$, (1 taškas)

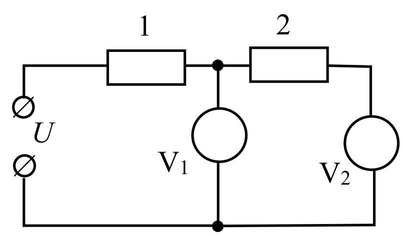
gauname: $c^2t^2 = 4l^2 + v^2t^2 + 2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} vt$. Sutvarkę, gauname kvadratinę lygtį laikui t:

$$(c^2 - v^2)t^2 - 2lvt - 4l^2 = 0 .$$ (2 taškai)

Ši lygtis turi tik vieną teigiamą sprendinį:

$$t = \frac{lv + \sqrt{l^2v^2 + 4l^2(c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2} = l\frac{v + \sqrt{4c^2 - 3v^2}}{c^2 - v^2} .$$ (2 taškai)

4. Grandinė, kurią sudaro du rezistoriai ir du voltmetrai V_1 ir V_2, prijungti prie įtampos $U = 10$ V šaltinio (žiūr. pav.). Tiek rezistorių, tiek voltmetrų varžos vienodos. Ką rodo voltmetrai V_1 ir V_2?



Sprendimas

Tegul kiekvieno grandinės elemento varža R, o voltmetrai V_1 ir V_2 rodo atitinkamai įtampąs U_1 ir U_2. (1 taškas)

Tada galima sudaryti 2 nepriklausomas lygtis grandinės dalims pritaikius Omo dėsnį, pvz.:

$$\begin{cases} U = \left(\dfrac{U_1}{R} + \dfrac{U_1}{2R}\right)R + U_1 \\ U_1 = U_2 + \dfrac{U_2}{R}R \end{cases}$$ (5 taškai)

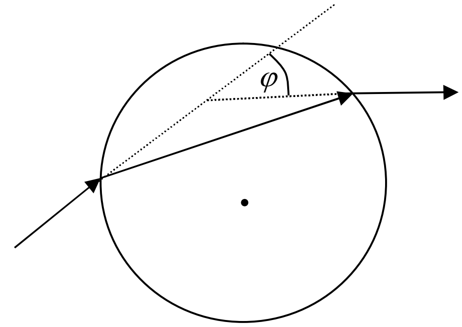
Galimi ir kiti lygčių variantai.

Išsprendę lygčių sistemą randame:

$$U_1 = \frac{2}{5}U = 4 \text{ V},$$ (2 taškai)

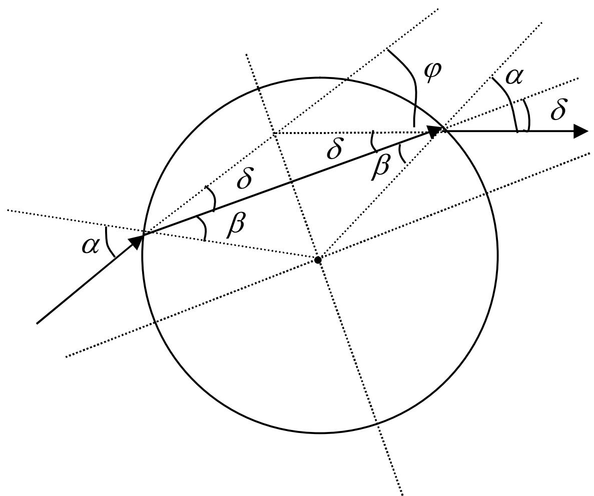
$$U_2 = \frac{1}{5}U = 2 \text{ V},$$ (2 taškai)

5. Lygiagrečių spindulių pluoštas krenta į stiklinį rutulį (žiūr. pav.). Spinduliai, patyrę lūžį du kartus (įeidami į rutulį ir išeidami iš jo) nukrypsta nuo pradinės sklidimo krypties kampu φ (pav. parodytas tik vienas pluošto spindulys). Didžiausia šio pluošto spindulio atsilenkimo kampo vertė 100°. Koks rutulio stiklo lūžio rodiklis n?



Sprendimas

Braižome brėžinį bendru atveju, kai kritimo į rutulio paviršių (liestinę plokštumą taške) kampas $\alpha \le 90°$. (2 taškai)



Didžiausia α vertė yra $\alpha_d = 90°$ (tuomet ir atsilenkimo kampas didžiausias). (1 taškas)

Lūždamas pirmą kartą, spindulys nukrypsta nuo pradinės krypties kampu δ, o lūždamas antrą kartą – vėl tokiu pat kampu δ. Taigi, galiausiai spindulys nukrypsta nuo pradinės krypties kampu $\varphi = 2\delta$. (2 taškai)

Iš brėžinio matyti, kad $\delta = \alpha - \beta$ (čia β – lūžio kampas). (1 taškas)

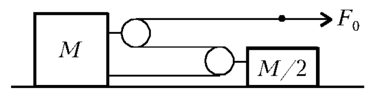
Be to, $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (Snelijaus dėsnis). (1 taškas)

Tada, kai $\alpha = 90°$, $\varphi = 2(\alpha - \beta) = 2(90° - \beta)$. Iš čia $\beta = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$. (1 taškas)

Iš Snelijaus dėsnio, kai $\alpha = 90°$, randame:

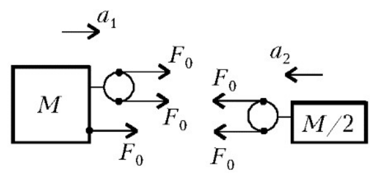
$$n = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{100°}{2}\right)} \approx 1{,}56.$$ (2 taškai)

68-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2020 m.)
11 klasė (užduotys ir sprendimai)



1. Du kūnai, kurių didesnio masė M = 1 kg, o antrojo perpus mažesnė, sujungti netampriu labai lengvu siūlu, kaip parodyta paveiksle. Šių kūnų sistema veikiant jėgai F_o = 1 N pradeda slysti stalo paviršiumi be trinties. Kokiu pagreičiu juda siūlo galas, kurį veikia jėga F_o? Trinties tarp siūlo ir skridinių paviršiaus bei skridinių masės nepaisyti.

Sprendimas



Siūlas bet kuriame taške įtemptas vienodai jėga F_o, todėl kūnus veikiančias jėgas galima pažymėti taip, kaip parodyta paveiksle. (2 taškai)

Tada sunkesnį kūną M veikianti jėgų atstojamoji F_1 lygi
$F_1 = 3\ F_o$ (1 taškas)
Šis kūnas juda pagreičiu
$a_1 = \dfrac{F_1}{M} = \dfrac{3F_o}{M}$ (1 taškas)
Antrąjį kūną veikia jėga $F_2 = 2\ F_o$. (1 taškas)
Antrasis kūnas juda pagreičiu a_2, tik į priešingą pusę:
$a_2 = \dfrac{F_2}{\frac{1}{2}M} = \dfrac{4F_o}{M}$ (1 taškas)
Siūlo galo judėjimą su kūnų judėjimu galima susieti taip: jei didesnįjį kūną paslenkame į dešinę 1 cm, tai atsipalaiduoja 3 cm siūlo, o siūlo galas (jėgos veikimo taškas) pasislenka per 3 cm į dešinę. Mažesnįjį paslinkus į kairę 1 cm atstumu, „atsipalaiduoja“ 2 cm siūlo, kuriuo pasislenka siūlo galas taip pat į dešinę.
Dėl to šiems kūnams judant pagreičiais a_1 ir a_2, siūlo galas judės pagreičiu
$a = 3a_1 + 2a_2$ (2 taškai)
arba
$a = \dfrac{17F_o}{M}$ (1 taškas)
Taigi, a = 17 m/s^2. (1 taškas)

2. Į cilindrinį indą įpilta vienoda masė gyvsidabrio ir vandens. Bendras dviejų skysčių sluoksnių storis H = 29,2 cm. Kokiu slėgiu skysčiai slegia indo dugną? Gyvsidabrio tankis ρ_1 = 13,6·10^3 kg/m^3, vandens tankis ρ_2 = 10^3 kg/m^3.

Sprendimas.

Kadangi vandens tankis mažesnis, tai jo storio h_1 sluoksnis bus virš storio h_2 sluoksnio gyvsidabrio. (1 taškas, gali būti pateiktas brėžinys)

Pagal sąlygą šių sluoksnių storių suma lygi H:
$H = h_1 + h_2$ (1) (1 taškas)

Tarkime, kad cilindro pagrindo plotas S, tada gyvsidabrio ir, atitinkamai, vandens masės cilindre yra

$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S h_1$ ir $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 S h_2$ (2) (1 taškas)

Be to, pagal sąlygą

$m_1 = m_2$ (3) (1 taškas)

Išsprendę (1)–(3) lygčių sistemą, gauname skysčių aukščius:

$h_1 = \dfrac{H\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ ir $h_2 = \dfrac{H\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$ (4) (2 taškai)

Slėgis, kurį kuria gyvsidabrio sluoksnis, lygus

$p_1 = \rho_1 g h_1 = gH\dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ (5) (1 taškas)

Vandens sluoksnio kuriamas slėgis lygus

$p_2 = \rho_2 g h_2 = gH\dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ (6) (1 taškas)

Galima pastebėti, kad tiek vandens, tiek gyvsidabrio sluoksnių kuriami hidrostatiniai slėgiai yra vienodi. Bendras skysčių slėgis į indo dugną lygus:

$p = 2gH\dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ (7) (1 taškas)

Taigi, $p \approx 5{,}3\cdot 10^3$ Pa . (1 taškas)

3. Vandens šildytuvas, kurio tūris $V = 5 \cdot 10^{-2}$ m^3 yra pilnai užpildytas vandeniu. Žinoma, kad jo galia $P = 3$ kW, o naudingumo koeficientas η svyruoja nuo 73 % iki 77 %. Apskaičiuokite, kiek ilgiausiai $t_{\max}$ ir kiek trumpiausiai $t_{\min}$ gali trukti sušildyti vandenį nuo $T_1 = 22$ °C iki $T_2 = 60$ °C. Vandens savitoji šiluma $c = 4{,}19$ kJ/(kg·K).

Sprendimas.

Ieškomi dydžiai randami iš naudingumo koeficiento apibrėžimo:

$\eta = \dfrac{Q_n}{Q_s}$, kur Q_n – naudingas šilumos kiekis, o Q_s – sunaudotas šilumos kiekis. (1 taškas)

$Q_n = V\cdot\rho\cdot c\cdot\Delta T$, čia $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ – vandens tankis; $\Delta T = T_2 - T_1$.

$Q_s = P\cdot t$.

Todėl, $\eta = \dfrac{V\rho c\Delta T}{Pt}$. Iš čia išreiškiame laiką $t = \dfrac{V\rho c\Delta T}{P\eta}$. (3 taškai)

Vandens šildymas ilgiausiai užtruks, kai η bus mažiausias, t.y. kai $\eta = \eta_{\min} = 73$ %.

$t_{\max} = \dfrac{V\rho c\Delta T}{P\eta_{\min}} = \dfrac{5\cdot 10^{-2}\ \text{m}^3\cdot 1000\,\text{kg/m}^3\cdot 4{,}19\cdot 10^3\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}\cdot 38\,\text{K}}{3\cdot 10^3\ \text{W}\cdot 0{,}73} \approx 60{,}6\,\text{min}$ (3 taškai)

Vandens šildymas trumpiausiai užtruks, kai η bus didžiausias, t.y. kai $\eta = \eta_{\max} = 77$ %.

$t_{\min} = \dfrac{V\rho c\Delta T}{P\eta_{\max}} = \dfrac{5\cdot 10^{-2}\ \text{m}^3\cdot 1000\,\text{kg/m}^3\cdot 4{,}19\cdot 10^3\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}\cdot 38\,\text{K}}{3\cdot 10^3\ \text{W}\cdot 0{,}77} = 57{,}4\,\text{min}$ (3 taškai)

Taigi, $t_{\max} \approx 60{,}6$ min ; $t_{\min} \approx 57{,}4$ min .

4. Elektronikos komponentų įmonė per parą pagamina tam tikrą skaičių ričių, kurių bendra masė m = 180 kg. Ritės susuktos iš volframo vielos (volframo tankis ρ = 19,3 g/cm^3, jo savitoji varža $\sigma = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$) ir kartu sujungtos nuosekliai sudaro R = 1,8 kΩ varžą. 1) Koks yra bendras volframo vielos ilgis? 2) Koks yra volframo vielos pradinis skersmuo? 3) Nustatykite, kiek pakinta šių ričių bendra masė m ir bendra varža R sumažinus naudojamos vielos skersmenį dvigubai.

Sprendimas

1) Pagrindinė varžos skaičiavimo formulė:

$R = \sigma \dfrac{l}{S}$, čia l – bendras vielos ilgis, o S – jos skerspjūvio plotas. (1 taškas)

Kadangi nuosekliai jungiant atskiras rites jų varža sumuojasi, todėl laikome, kad bendra sunaudotos vielos varža ir yra R = 1,8 kΩ = 1800 Ω.

Žinome, kad $V = \dfrac{m}{\rho}$ ir $V = S \cdot l$, todėl $R = \dfrac{\sigma \cdot l^2 \cdot \rho}{m}$.

Iš čia $l = \sqrt{\dfrac{mR}{\rho\sigma}} = \sqrt{\dfrac{180\,\mathrm{kg} \cdot 1800\,\Omega}{5{,}5 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m} \cdot 19300\,\mathrm{kg/m^3}}} \approx 17500\ \mathrm{m}$. (2 taškai)

2) Įvedame atitinkamus parametrus prieš vielos skersmens sumažinimą: $m = m_1$, $d = d_1$ ir $R = R_1$ bei po skersmens sumažinimo: m_2, d_2, ir R_2.

Vielos skersmuo prieš sumažinimą:

$$d_1 = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{m_1}{\rho \cdot l \cdot \pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{m\sigma}{\rho R}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{180\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}}{19300\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1800\,\Omega}} = 8{,}24 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m},$$

o po sumažinimo $d_2 = d_1 / 2 = 4{,}12 \cdot 10^{-4}$ m. (2 taškai)

3) Taigi, masės pokytis:

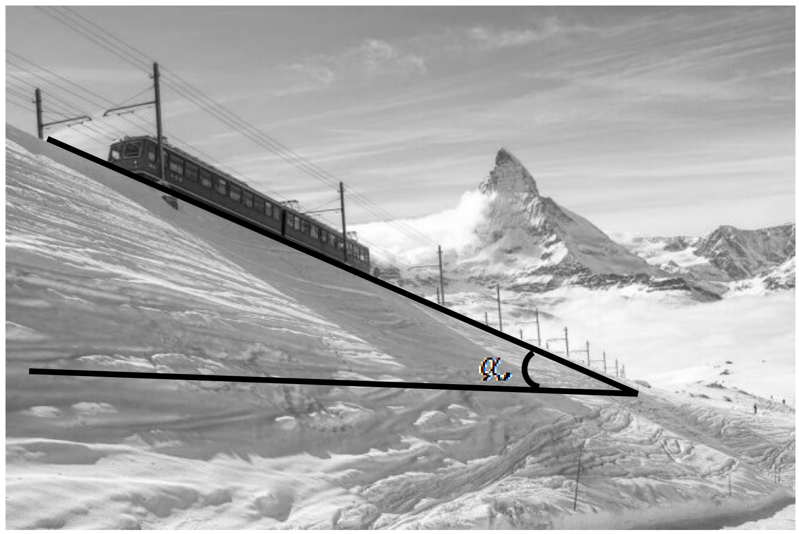
$\Delta m = |m_1 - m_2| = \left|\pi \cdot \left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \rho \cdot l - \pi \cdot \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \rho \cdot l\right| = \left|m - \dfrac{m}{4}\right| = |180\,\mathrm{kg} - 45\,\mathrm{kg}| = 135\,\mathrm{kg}.$ (2 taškai)

Varžos pokytis:

$\Delta R = |R_1 - R_2| = \left|R - \dfrac{\sigma \cdot l^2 \cdot \rho}{m_2}\right| = |R - 4R| = |1800\ \Omega - 7200\ \Omega| = 5400\ \Omega.$ (2 taškai)

Taigi, $\Delta m = 135$ kg, ričių masė sumažėjo 4 kartus. $\Delta R = 5400\,\Omega$, bendra nuosekliai sujungtų ričių varža padidėjo 4 kartus. (1 taškas)

5. Elektriniam traukiniui judant horizontaliu paviršiumi pastoviu greičiu, traukinio varikliu teka $I_0 = 100$ A srovė. Traukinio variklio naudingumo koeficientas yra 90%. Judant šiam traukiniui tuo pačiu greičiu nuo kalno, srovės stipris variklyje yra lygus 0 A, t.y. variklis yra išjungiamas. Kokio stiprio elektros srovė tekės šio traukinio varikliu, jeigu jis tuo pačiu greičiu kyla į tą patį kalną?



Sprendimas:

Įtampą laiduose pažymime U. Kai traukinys juda horizontaliu paviršiumi, jo galia:

$N = I_0 U$. (1 taškas)

Traukinio variklio varžą pažymime R. Dėl varžos yra šiluminiai nuostoliai, kurie lygūs:

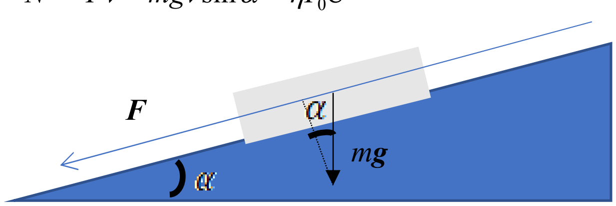
$N_\text{n} = I_0^2 R$. (1 taškas)

Naudingoji variklio galia:

$N' = I_0 U - I_0^2 R = \eta I_0 U$. (1) (1 taškas)

Jeigu traukinys juda pastoviu greičiu, tai variklio išvystoma naudingoji galia yra lygi visai pasipriešinimo jėgų galiai (oro pasipriešinimas, trintis ir t.t.).
Traukiniui leidžiantis nuo kalno, darbą atlieka sunkio jėga, kuri lygi $mg \sin\alpha$.
Tuomet traukinio galia

$N' = Fv = mgv \sin\alpha = \eta I_0 U$ (2 taškai)



Traukiniui kylant į kalną, jo varikliu teka stiprio I srovė. Tuomet kylant variklio visa galia: $N_1 = UI$. Kūnui judant tolygiai, ši galia prarandama dėl šilumos (I^2R), pasipriešinimo jėgoms ($\eta I_0 U$) ir sunkio jėgai nugalėti ($\eta I_0 U$), taigi,

$UI = I^2 R + 2\eta I_0 U$. (1 taškas)

Iš čia randame I:

$$I = I_0 \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 8R\eta UI_0}}{2R}. \qquad (2)$$ (1 taškas)

Iš (1) apskaičiuojame R:

$$R = \frac{U}{I_0}(1-\eta).$$

Įrašę į (2), gauname:

$$I = I_0 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}.$$ (1 taškas)

Atlikus skaičiavimus gauname dvi srovių vertes:

$I \approx 235\text{A}$ ir 765A. (1 taškas)

Atsižvelgiant į tai, kad varikliai daromi tokie, kurie suvartoja kuo mažiau energijos, tai srovė variklyje yra lygi 235A (1 taškas)

68-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2020 m.)

12 klasė (užduotys ir sprendimai)

1. Tuščiavidurė $R = 1$ m spindulio sfera plūduriuoja ant vandens paviršiaus. Sferos centras yra $z = 10$ cm atstumu nuo vandens paviršiaus, o 1/4 sferos tūrio dalis yra panirusi žemiau vandens paviršiaus lygio. Išvedus sferą iš pusiausvyros padėties mažu atstumu x, ji pradeda laisvai svyruoti vertikalia kryptimi. Raskite šių harmoninių svyravimų periodą T_0.
Laikyti žinomais: sferos spindulį R, atstumą z, vandens tankį ρ, laisvojo kritimo pagreitį g. Į vandens judėjimą galima nekreipti dėmesio.

Sprendimas

Esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties sferos centro judėjimą galime aprašyti II Niutono dėsniu:

$$ma = -\Delta F_A \qquad (1) \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia m – sferos masė, a – sferos centro judėjimo pagreitis, ΔF_A – Archimedo jėgos pokytis esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties.

Sferos masę randame iš pusiausvyroje esančio kūno sąlygos (pusiausvyros metu sunkio ir Archimedo keliamoji jėgos viena kitą atsveria):

$$mg = F_A \quad \Rightarrow m = \frac{F_A}{g} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{g} = \frac{\pi R^3 \rho}{3}. \qquad (2) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Archimedo jėgos pokytis esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties lygus

$$\Delta F_A = \rho g \Delta V = \rho g \cdot \pi r^2 \cdot x \qquad (3)$$

čia ΔV – panirusio rutulio tūrio dalies pokytis (kadangi x mažas, tai laikome lygiam cilindro tūriui); πr^2 – rutulio skerspjūvio plotas vandens paviršiaus lygyje esant pusiausvyrai. Be to, šio skerspjūvio spindulys yra

$$r^2 = R^2 - z^2 \qquad (4) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Iš (1) – (4) gauname:

$$\frac{\pi R^3 \rho}{3}\cdot a = -\rho g \cdot \pi\left(R^2 - z^2\right)\cdot x \quad \Rightarrow a = -\frac{3g\left(R^2 - z^2\right)}{R^3}\cdot x \qquad \text{(2 taškai)}$$

Tai yra harmoninius svyravimus aprašanti lygtis (t.y. $a + \omega_0^2 \cdot x = 0$ arba $a = -\omega_0^2 \cdot x$, čia ω_0 – ciklinis svyravimų dažnis). Tokiu būdu randame šių harmoninių svyravimų periodą:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{3 \cdot g \cdot \left(R^2 - z^2\right)}} = 3{,}82 \text{ s}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

2. Vandens turbina, kurios naudingumo koeficientas $\eta = 0{,}7$, per sekundę sunaudoja V = 25 m^3 vandens. Nustatykite šios turbinos galią, jei vanduo į ją patenka v_1 = 12 m/s greičiu, o išteka v_2 = 4 m/s greičiu. Įtekančio ir ištekančio vandens aukščių skirtumas h = 6 m.

Sprendimas

Aukštyje h vandens energija lygi

$$E_1 = E_p + E_k = mgh + \frac{mv_1^2}{2}.$$ (2 taškai)

Ištekėjimo taške vandens energija lygi: $E_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$ (1 taškas)

Vandens masė randama iš medžiagos tankio formulės: $m = \rho V$.

Turbinos atliekamas darbas lygus

$$A = E_1 - E_2 = mgh + \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}.$$ (1 taškas)

Kaip žinoma, galia apibrėžiama kaip

$$N_v = \frac{A}{t}.$$ (1 taškas)

Tada

$$N_v = \frac{m}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$$ (1 taškas)

Pasinaudoję ankstesnėmis formulėmis randame

$$N_v = \frac{\rho V}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$$ (1 taškas)

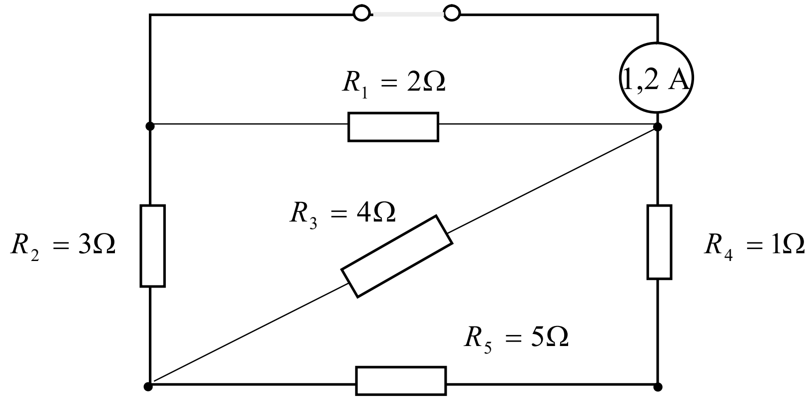
Atsižvelgdami į naudingumo koeficientą, galime užrašyti

$\eta = \frac{A_n}{A_v} = \frac{N_n}{N_v}$. Tada $N_n = \frac{\rho V \eta}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$ (2 taškai)

Įrašę skaitines reikšmes apskaičiuojame

$$N_n = \frac{1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 25\mathrm{m^3} \cdot 0{,}7}{1\mathrm{s}}\left(10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\mathrm{m} + \frac{(12\mathrm{m/s})^2}{2} - \frac{(4\mathrm{m/s})^2}{2}\right) \approx 2170\ \mathrm{kW}\ .$$ (1 taškas)

3. Duota elektrinės grandinės schema. Apskaičiuokite, koks šilumos kiekis išsiskirs rezistoriuje R_3 per vieną minutę. Ampermetro varža labai maža.



Sprendimas

Visa grandinės varža:

$$R_g = \frac{R_1 \cdot \left(R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3}} = \frac{2 \cdot \left(3 + \frac{(5+1) \cdot 4}{1+5+4} \right)}{2 + 3 + \frac{(5+1) \cdot 4}{1+5+4}} = \frac{2 \cdot \left(3 + \frac{24}{10} \right)}{5 + \frac{24}{10}} \approx 1{,}46(\Omega)$$ (3 taškai)

Grandinės įtampa apskaičiuojama pagal Omo dėsnį grandinės daliai:

$$U = R_g I_g = 1{,}46 \cdot 1{,}2 \approx 1{,}75\,(\mathrm{V}).$$ (1 taškas)

Apskaičiuojame srovės, tekančios per rezistorių R_2, stiprį:

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3}} \approx 0{,}324\,(\mathrm{A}) = 324\,(\mathrm{mA}) \quad .$$ (1 taškas)

Įtampa, tenkanti rezistoriui R_3, lygi

$$U_3 = \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} \cdot I_2 \approx 0{,}778\,(\mathrm{V}) = 778\,(\mathrm{mV}).$$ (1 taškas)

Tada apskaičiuojame srovės, tekančios rezistoriumi R_3, ,stiprį:

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0{,}195\,(\mathrm{A}) \approx 195\,(\mathrm{mA}) \; .$$ (1 taškas)

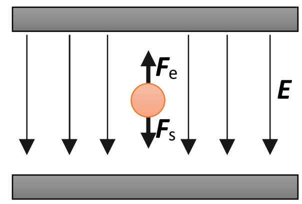
Tuo būdu rezistoriuje R_3 išsiskiria galia $P = U_3 \cdot I_3 = \frac{A}{t}$. (1 taškas)

Ieškoma šiluma, išsiskirianti per $t = 1\text{ min} = 60\text{ s}$, lygi

$$Q = A = P \cdot t = U_3 \cdot I_3 \cdot t = \frac{U_3^2}{R_3} \cdot t = I_3^2 \cdot R_3 \cdot t \approx 9{,}1\,(\mathrm{J})$$ (2 taškai)

4. Milikeno eksperimento metu stebimas tarp dviejų lygiagrečių horizontalių plokštelių pakibęs mažas alyvos lašelis. Tarkime, kad įtampa tarp plokštelių yra U = 2033 V, o tarpas tarp jų $h = 2\ \text{cm}$. Lašelio skersmuo $d = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$, o alyvos tankis $\rho = 0{,}81\ \text{g/cm}^3$. Raskite laisvųjų elektronų, esančių lašelyje, skaičių n. Plokštelių matmenys žymiai didesni už tarpą tarp jų. Vieno elektrono krūvis $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$.

Sprendimas



$$F_e = qE\text{;}\ E = \frac{U}{d}.$$ (2 taškai)

Čia F_e – elektrostatinė jėga, q – lašelio visas krūvis, E – elektrinio lauko tarp plokštelių stipris.

Lašelio sunkio jėga $F_s = mg$. (1 taškas)

Vieno lašelio masė

$$m = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\right] = \rho\pi\frac{d^3}{6}.$$ (2 taškai)

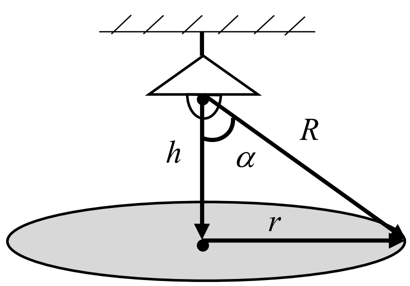
Elektrostatinės ir sunkio jėgų lygybės (pusiausvyros) atveju

$$F_e = F_s \Rightarrow q\frac{U}{h} = mg \quad \Rightarrow \quad q = \frac{mgh}{V} = \frac{\pi\rho d^3 gh}{6U}.$$ (3 taškai)

Taigi, $$n = \left|\frac{q}{e}\right| = \frac{\pi\rho d^3 gh}{6U|e|} \approx 16.$$ (2 taškai)

4. Apskritimo formos r = 2 m spindulio aikštelę reikia apšviesti vienu virš aikštelės centro pakabintu šviestuvu. Kokiame aukštyje reikia pakabinti šviestuvą, kad aikštelės kraštai būtų apšviesti labiausiai?

Sprendimas



Brėžinys (1 taškas)

Apšvieta $E = \dfrac{\Phi}{S_{sferos}}$, $\Phi = 4\pi \cdot I \ \left(\text{sr} \cdot \text{cd}\right) \ \rightarrow E = \dfrac{4\pi \cdot I}{4\pi R^2} = \dfrac{I}{R^2}$, kai R su h sudaro nulinį kampą $\alpha = 0$, t.y. kai apšviečiamas plotas yra statmenas tiesei, jungiančiai šį plotą su šviesos šaltiniu. (2 taškai)

Kai $\alpha > 0$ tuomet apšvieta nuo aikštelės centro iki jos krašto atstumu r nusakoma tokia išraiška:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos\alpha \, . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kadangi $R \cdot \cos\alpha = h \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{h}{R}$, tuomet apšvieta ties aikštelės kraštais yra $E = \dfrac{I \cdot h}{R^3}$. (2 taškai)

Iš stačiojo trikampio Pitagoro teoremos $R^2 = h^2 + r^2$. Tuomet apšvieta kaip funkcija nuo pakabinimo aukščio h:

$$E\left(h\right) = \frac{I \cdot h}{\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3}} \, . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Uždavinys reikalauja rasti tokį šviestuvo pakabinimo aukštį h, kad aikštelės kraštus apšviestų labiausiai, vadinasi, reikia rasti apšvietos funkcijos $E(h)$ ekstremumą, kad ji būtų maksimali.

Funkcijos $E(h)$ išvestinę aukščio h atžvilgiu reikia prilyginti nuliui:

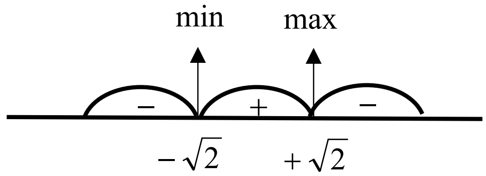
$$E'\left(h\right) = I \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3}} \right)' = 0$$

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3}} \right)' = \frac{h'\left(\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3}\right) - \frac{3}{2} h \cdot \left(\sqrt{h^2 + r^2}\right) \cdot \left(h^2 + r^2\right)'}{\left(h^2 + r^2\right)^3} = \frac{\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3} - 3 \cdot h^2 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}}{\left(h^2 + r^2\right)^3} = 0$$

(2 taškai)

Kadangi $\left(h^2 + r^2\right) \neq 0$, tai $\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)^3} - 3 \cdot h^2 \sqrt{h^2 + r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad h^2 + r^2 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 - 2h^2 = 0$.

Iš čia $h_{\text{ekstr}} = \pm \dfrac{r}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$ m .



Be to, tinkami tik teigiami $h > 0$. Vadinasi, aikštelės kraštai bus labiausiai apšviesti, kai šviestuvas pakabintas $h_{\text{ekstr}} = \sqrt{2}$ m aukštyje , t.y. $h \approx 1{,}41$ m. (1 taškas)