Vilniaus universitetas

Metodinė medžiaga
Optimizavimo uždaviniai

Mokyklos pedagogika

Metodinė medžiaga. Optimizavimo uždaviniai

Informatikos ir informatinio mąstymo veiklos sukurtos įgyvendinant projektą „Aukštųjų mokyklų tinklo optimizavimas ir studijų kokybės gerinimas Šiaulių universitetą prijungiant prie Vilniaus universiteto“, projekto Nr. 09.3.1-ESFA-V-738-03-0001, vykdomą pagal 2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programos 9 prioriteto ,,Visuomenės švietimas ir žmogiškųjų išteklių potencialo didinimas“ 09.3.1-ESFA-V-738 įgyvendinimo priemonę ,,Aukštųjų mokyklų tinklo tobulinimas“, finansuojamą Europos Sąjungos fondų ir Lietuvos Respublikos valstybės biudžeto lėšomis.

Metodinė medžiaga „Optimizavimo uždaviniai“, skirta Mokyklos pedagogikos studijų programos moduliui „Informatikos didaktika". Tikslinė grupė – būsimi informatikos mokytojai. Medžiaga skirta susipažinti su optimizavimo uždavinių sprendimo galimybėmis, modeliavimo pradmenimis. Pateikiami ir išsamiai aptariami įvairūs uždaviniai.

Šios veiklos autoriai: dr. Sigita Turskienė

Redagavo: Viktoras Dagys

Projekto vykdytojas: Vilniaus universitetas.

2022, Vilnius

Optimizavimo uždaviniai. Metodika ir veiklos

Tikslas

Susipažinti su optimizavimo uždavinio formuluote ir sprendimo metodais, matematinio modeliavimo pradmenimis.

Ryšys su bendrosiomis programomis

Informatika (algoritmai ir problemų sprendimas bendrosiose ugdymo programose yra B ir C dalys, tokia numeracija vartojama ir čia):

B. Algoritmai ir programavimas:

1. B1. Įžvelgia algoritmų, programų naudą, atpažįsta ir vartoja pagrindines sąvokas. (Informatikos bendrosios programos projektas, https://www.emokykla.lt/upload/EMOKYKLA/BP/PDF/informatika/INFORMATIKOS%20BP%20projektas.%202021-03-30.pdf)
2. B3. Kuria ir vykdo algoritmus, programas. (Informatikos bendrosios programos projektas, https://www.emokykla.lt/upload/EMOKYKLA/BP/PDF/informatika/INFORMATIKOS%20BP%20projektas.%202021-03-30.pdf)

Matematika:

C. Problemų sprendimas. C1. Modeliuoja įvairaus konteksto suprantamas ir prasmingas situacijas: skaido problemą į dalis, nustato jų tarpusavio santykį, suformuluoja matematinį klausimą/užduotį. (Matematikos bendrosios programos projektas, https://www.emokykla.lt/upload/EMOKYKLA/BP/PDF/matematika/Matematikos%20BP%20projektas%202021-03-31.pdf)

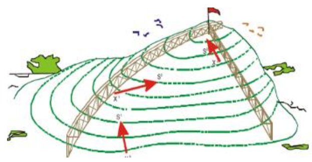
Ugdomi įgūdžiai

Modeliuoti įvairaus konteksto prasmingas situacijas, kurti matematinį modelį, formuluoti optimizavimo uždavinį, parinkti jo sprendimo metodą.

TEORINIS PAGRINDIMAS. MEDŽIAGA MOKYTOJUI

Įvadas

Kas yra optimizavimas?



Optimizavimas – tai paieška uždavinio sąlyga apibrėžtoje aibėje tokio elemento, kuriam kriterijaus reikšmė būtų minimali arba maksimali.

Kaip optimizavimo sąvoka apibrėžta lietuvių kalbos žodyne?

Žodyne pateikiamos kelios optimizavimo paskirties sampratos, atspindinčios pagrindines realias problemas.

Optimizavimas – (plg. optimizmas), optimizacija:

1. klausimo ar uždavinio geriausio sprendimo būdo radimas pagal iš anksto nusistatytą kriterijų;

2. matematikoje funkcijos globaliojo ekstremumo radimo procesas;

3. kompiuterio programos keitimas, išlaikantis jos semantiką, bet sumažinantis matmenis, atlikimo laiką, racionaliau naudojantis kompiuterio resursus (nėra operacijų pertekliškumo ar kartojimo);

4. ekonomikoje ekstremalių tikslo funkcijos reikšmių apskaičiavimas, taikomas sprendinių priėmimo procese, pvz., pelno didinimas arba sąnaudų mažinimas.

http://www.lietuviuzodynas.lt/terminai/Optimizavimas

Programavime optimizavimas – tai programuotojo ar kompiliatoriaus atliekamas programinio kodo keitimas, siekiant pagreitinti programos veikimą, sumažinti naudojamą atmintį ar kitaip pagerinti, nekeičiant funkcionalumo.

Šaltinis: https://lt.wiktionary.org/wiki/optimizavimas.

Koks uždavinys vadinamas optimizavimo uždaviniu?

Optimizavimo uždaviniu vadiname tokį uždavinį, kai yra daug jo galimų sprendinių, kurių kiekvieną galima kaip nors įvertinti, o ieškoma sprendinio, turinčio tam tikrą (optimalią) vertę, t. y. didžiausią ar mažiausią.

Aptarkime paprastą realaus gyvenimo uždavinį.

Alergija miltams

Kai kurie vienos šeimos vaikučiai negali valgyti patiekalų iš tam tikros rūšies miltų, nes jiems yra alergiški. Mama Barbora ruošia gimtadienio šventei patiekalus iš miltų ir nori pagaminti pakankamą įvairovę patiekalų, kad visi vaikučiai rastų, ko paskanauti. Kiekvienas patiekalas yra pagamintas iš vienos rūšies miltų ir vaikučiai noriai jais dalijasi. Mama Barbora turi sąrašą, kuriame nurodoma, kokių rūšių miltus gali valgyti gimtadienio dalyviai:

Vardas	Miltai
Barbora	Kviečių, rugių, ryžių, kokosų
Benas	Kviečių, rugių, migdolų
Laima	Rugių
Domas	Ryžių, avižų
Vida	Kviečių, kokosų, avižų
Jonas	Rugių, ryžių
Aušra	Migdolų, kokosų

Barbora norėtų gaminti patiekalų iš kiekvienų miltų. Suformuluosime klausimą:

Kiek mažiausiai patiekalų Barbora galėtų paruošti gimtadienio šventei, kad visi liktų pavalgę?

Galimi atsakymų variantai

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 F) 6

Kuris atsakymas yra teisingas?

Užduoties aptarimas:

- Akivaizdu, kad Barbora būtinai turi pagaminti patiekalą iš ruginių miltų Laimai.
- Barbora, Benas ir Jonas taip pat jį galės valgyti.
- Likę vaikai neturi bendrų tinkamų valgyti miltų, todėl reikės dar bent dviejų patiekalų. Tinkamų miltų poros gali būti: ryžių ir kokosų, migdolų ir avižų arba kokosų ir avižų.

Taigi teisingas atsakymas bus C.

Galime rasti daug panašių realaus gyvenimo pavyzdžių ir kitomis temomis.

Kas yra optimalus?

Toliau išsamiau aptarsime optimizavimo apibrėžimo ketvirtąjį atvejį – ekonomikos ekstremalių tikslo funkcijos reikšmių apskaičiavimą.

Kaip suprantame sąvoką optimalus?

Jau nuo neatmenamų laikų žmonės sprendžia optimizavimo uždavinius – ieško optimalių, tam tikrais aspektais geriausių alternatyvų, siekia tobulumo įvairiose veiklos srityse. Žmonės visada siekė didesnio patogumo, naudos, pelno sunaudodami kuo mažiau pastangų ir lėšų.

Kur realiomis sąlygomis sutinkami optimizavimo uždaviniai?

1. Ekonomikoje siekiama, kad pelnas ir pardavimai turi būti kuo didesni, o išlaidos – kuo mažesnės.
2. Programuotojai nori sukurti programas, kad programuotojo ar kompiliatoriaus atliekamas programinio kodo keitimas pagreitintų programos veikimą, sumažintų naudojamą atmintį, nekeičiant funkcionalumo.
3. Kompiuterių specialistai nori taupyti kompiuterių tinklų resursus ir apkrovas, todėl sprendžia resursų paskirstymo optimizavimo uždavinį.
4. Matematikai nagrinėja matematinės funkcijos globaliojo ekstremumo radimą.

Pirmiausia aptarsime žodžio **optimalus** (arba optimumas) paskirtį.

Žodis „optimalus“ (lot. k. *optimus* – geriausias) apibrėžiamas kaip tinkamiausias, palankiausias, geriausias. https://www.lietuviuzodynas.lt/terminai/Optimalus

Daug sąvokų gimė iš žodžio „optimalus“:

- optimumas: 1. palankiausių sąlygų visuma; 2. geriausias tikslo siekimo būdas esamomis sąlygomis.
- optimizacija – geriausio sprendimo, varianto radimas.

Truputis istorijos

Optimumo terminą įvedė G. Leibnicas (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz) 1710 metais. Tačiau senovės graikų matematikai Euklidas ir Heronas iš Aleksandrijos jau sprendė optimizavimo uždavinį, mėgindami įrodyti, kad optinėse sistemose šviesa renkasi trumpiausią kelią.

Optimalių sprendinių paieškos uždaviniai buvo aktualūs seniau, tokie yra ir šiandien. Seniau tokie uždaviniai buvo sprendžiami intuityviai, vėliau – matematiniais metodais. Dar prieš mūsų erą senovės graikų matematikas Euklidas aprašė, kokiais būdais galima nubrėžti ilgiausią ir trumpiausią atkarpą, jungiančią tašką su apskritimu, matematiniais metodais įrodė, kokia turi būti lygiagretainio forma, kad jo plotas būtų didžiausias.

XVII ir XVIII a. žymūs prancūzų matematikas Žozefas Lui Lagranžas (pranc. *Joseph-Louis Lagrange*) pasiūlė optimizavimo uždavinių su lygybiniais apribojimais sprendimo metodus. XIX a. viduryje Vilniaus universiteto profesorius Zigmantas Revkovskis (lenk. *Zygmunt Rewkowski*) taikė matematikos metodus geležinkelio tiesimo darbų organizavimui pagerinti.

XX a. atsirado naujos klasės uždaviniai, susiję su ūkio ir įmonių valdymu, optimaliu išteklių paskirstymu, optimalių sprendimų priėmimu, kai tenka atsižvelgti į daug veiksnių, todėl buvo sukurti nauji optimizavimo metodai. Prasidėjo tiesinio programavimo teorijos ir simplekso metodo plėtra.

1947 m. amerikiečių matematikas Džordžas Dancigas (angl. *George Dantzig*) sukūrė simplekso metodą – pagrindinį šiuo metu tiesinio programavimo uždavinių sprendimo metodą. Vėliau paaiškėjo šio metodo svarba įvairiems praktiniams valdymo ir projektavimo uždaviniams spręsti.

Labai aktyviai optimizavimo teorija ir metodai (tiesinis programavimas, netiesinis programavimas, dinaminis programavimas ir kt.) buvo plėtojami, kai atsirado kompiuteriai (anuo metu jie pas mus buvo vadinami elektroninėmis skaičiavimo mašinomis – ESM), sudarę galimybę spręsti pakankamai sudėtingus ir didelės apimties optimizavimo uždavinius.

XX a. šeštajame dešimtmetyje optimizavimo uždaviniai pradėti spręsti ir Lietuvoje. Paminėtini Lietuvos mokslininkai: Jonas Mockus sprendė elektros tinklų optimizavimo problemas, Aleksandras Čyras pritaikė matematinio programavimo metodus statybinių konstrukcijų optimizavimui, Edmundas Kazimieras Zavadskas tobulino daugiakriterinius optimizavimo metodus.

Šiuo metu Leonidas Sakalauskas tiria netiesinio ir stochastinio optimizavimo metodus, Antanas Žilinskas – globalią optimizaciją.

Koks taškas optimalus?

Optimalus taškas – tai taškas, kuriame gaunamas maksimumas esant mažiausioms reikšmėms arba minimumas esant didžiausioms reikšmėms.

Kokie mokslai tyrinėja optimizavimo problemas?

Žmonijos poreikiai auga, todėl dabar optimizavimo uždaviniai yra sutinkami įvairiose mokslo ir pramonės srityse. Dėl sparčios technologijų plėtros formuluojami vis sudėtingesni, daug skaičiavimo resursų reikalaujantys optimizavimo uždaviniai.

Optimizavimas yra vienas seniausių mokslų, kuris persikelia ir į kasdienes mūsų veiklas. Optimizavimo problemas sprendžia daugelis mokslų, įvairių sričių inžinieriai, verslo atstovai, taip pat ir matematikai. Informatikai tyrinėja algoritmų optimalumą ir jų taikymą praktikoje. Optimizavimo teorija ir optimizavimo metodus realizuojančios programinės įrangos kūrimas yra sparčiai plėtojama informatikos mokslo šaka.

Ko siekia verslas savo veikloje?

Pavyzdžiu pasirinksime ir išsamiau aptarsime optimalaus išteklių naudojimo uždavinį, nes juo lengviau suprasti tiesinio programavimo uždavinį.

Pagrindinis verslo uždavinys – racionalus ūkio organizavimas. Ūkinėje veikloje dažnai ieškomos optimalios ekonomikos parametrų reikšmės, nes riboti resursai bei technologijų galimybės liepia pasirinkti vieną iš kelių galimų variantų. Todėl įmonės vadovui praktiniame darbe dažnai tenka priimti įvairius sprendimus, pavyzdžiui:

- Kaip suplanuoti gamybą ar panaudoti turimus išteklius, kad gautas pelnas už pagamintą produkciją būtų didžiausias?
- Kaip siuvėjui sukirpti medžiagą, kad būtų kuo mažiau atliekų?
- Kaip paskirstyti transportą produkcijai iš pasiskirstymo punktų (pvz., sandėlių) pervežti įvairiems užsakovams reikiamais kiekiais, kad bendrosios vežimo išlaidos būtų minimalios?
- Kaip suprojektuoti statybinę konstrukciją, kad ji būtų pakankamai stipri, standi ir kiek galima pigesnė?
- Kaip nuvykti iš tam tikro taško į tam tikrą punktą (objektą) **trumpiausiu** maršrutu?
- Kaip paskirstyti kompiuterių tinklų resursus ir apkrovas vartotojams?

Kiekviena įmonė stengiasi savo veiklas ir gamybos procesus analizuoti ir optimizuoti, nes:

- tai neišvengiamas ir **būtinas** procesas kiekviename versle.
- juo siekiama **išlaikyti pranašumą rinkoje**.

Optimizavus verslo procesą sumažinamos įmonės sąnaudos, todėl verslo pelningumas auga. Jei verslo procesai yra neveiksmingi, įmonė ar organizacija kenčia nuo didelių valdymo išlaidų ir pelno trūkumo.

Optimizavimo uždavinys

Daugelis gamybos planavimo ir ekonominių uždavinių yra susiję su riboto kiekio išteklių, pvz., žaliavų, darbo jėgos, energijos, kuro ir kt. pasiskirstymu. Dažnai turimus išteklius galima paskirstyti ir panaudoti ne vienu, o keliais būdais. Taip gali būti suformuluojamas matematinis uždavinys: **rasti geriausią išteklių paskirstymo planą, kuris duotų didžiausią ekonominį efektą**. Išteklių panaudojimo problemai spręsti gali būti naudojami įvairūs matematiniai metodai. **Tam reikia bandyti tarp kintamųjų ir ribotų išteklių bei siekiamų tikslų nustatyti matematines priklausomybes**. Jeigu tos priklausomybės yra tiesinės, tai bus taikomi tiesinio programavimo uždavinių sprendimo metodai. Optimalaus išteklių naudojimo problemos sprendimą paprasčiausia suprasti taikant *simplekso metodą.* Šiuo metodu gaunamas optimalus sprendinys ir galima atlikti jo analizę.

Suformuluosime šios temos tikslus:

- Įgyti sampratą apie tiesinio programavimo uždavinių sprendimą;
- Išmokti parengti paprastus matematinius modelius;
- Išmokti spręsti tiesinio programavimo uždavinius bent vienu metodu, pavyzdžiui, grafiniu ar simplekso metodu.
- Bandyti atlikti optimalaus sprendinio analizę.
- Susipažinti su programine įranga, padedančia išspręsti minėtus uždavinius.

Optimizavimo uždavinio bendrasis pavidalas

Tarkime, kad konkrečios įmonės veikloje reikia priimti optimalų sprendimą dėl gaminamos produkcijos asortimento kiekio, siekiant gauti kuo didesnį pelną. Įmonės specialistai žino:

- kiek ir kokių išteklių reikia gamybai,
- kokią produkciją galėtų gaminti.

Be to, specialistai apskaičiavo, kokį pelną galėtų gauti pardavę pagamintos produkcijos vienetą. Įmonės specialistams reikia padėti įvertinti, kiek ir kokios produkcijos būtų galima pagaminti iš turimų išteklių. Iškyla uždavinys, susijęs su riboto kiekio išteklių (žaliavų, energijos, kuro ir kt.) paskirstymu. Dažnai turimus išteklius galima paskirstyti ne vienu, o keliais būdais.

Taip formuojasi uždavinys – rasti geriausią išteklių paskirstymo planą, kuris duotų didžiausią ekonominį efektą. Aišku, kad tokie uždaviniai turi daug sprendinių.

Pirmiausiai analizuojant situaciją atrodo, kad reikėtų gaminti tik tokią produkciją, už kurios vienetą gaunamas didžiausias pelnas. Bet kiekvienos produkto rūšies gamybai gali būti sunaudojami skirtingi išteklių kiekiai. Situacija sudėtingėja, kuo daugiau yra gaminamų produktų rūšių ir kuo įvairesnių išteklių rūšių sunaudojama jų gamybai.

Tarkime, gamybos planus ir pelną riboja turimi žaliavų ištekliai ir įrenginiai. Šias sąlygas aprašysime matematinėmis lygtimis arba nelygybėmis (trumpiau vadinsime sąlygomis):

$$g_i(x_j) \leq (= \geq)\ b_i\,,\ i = 1, 2, \ldots \ldots, m \qquad (1)$$

čia g_i aprašo išteklių naudojimo priklausomybes, pvz., darbo laiko ar žaliavų sąnaudas, krovinių vežimo apimtį ir kt.;

x_j – gaminamos produkcijos kiekis;

b_i – ribojimų laisvieji nariai, pavyzdžiui, turimų išteklių kiekis;

$j = 1, 2, \ldots \ldots, n$ – produkcijos rūšis.

Ribojimuose (1) griežtų lygybių skaičius būna mažesnis už nežinomųjų skaičių. Tai reiškia, kad leistinų sprendinių yra labai daug. Tada iškyla **geriausio sprendinio parinkimo problema**.

Kiekvienas leistinas išteklių paskirstymo sprendinys gali būti vertinamas atitinkama tam tikro kriterijaus (pvz., pelno) reikšme. Todėl visų pirma reikia nustatyti, pagal kokį požymį bus parinktas tinkamiausias rezultatas. Išrinkti tinkamą sprendinį yra natūralus siekis, bet toks įvertinimas yra subjektyvus. Todėl pasirinkus tam tikrą optimalumo kriterijų – tikslo funkciją f(x), – galime leistinus sprendinius palyginti ir atrinkti mums tinkamą. Taip gausime optimalų sprendinį.

Tokiu būdu uždavinys, kuriame iš daug leistinųjų sprendinių reikia rasti optimalų sprendinį (pvz., trumpiausią maršrutą, didžiausią pelną ir kt.) vadinamas **optimizavimo uždaviniu.**

Kokia yra optimizavimo uždavinio matematinio modelio apibendrinta forma?

Optimizavimo uždavinio matematinio modelio apibendrintos formos bus dvi:

1. rasti

$$f(x) \rightarrow \max,$$

kai

$$g_i(x_j) \leq (=\geq)\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots \ldots, m \qquad (2)$$
$$x_j \geq 0$$

2. rasti

$$f(x) \rightarrow \mathrm{mix},$$

kai

$$g_i(x_j) \leq (=\geq)\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots \ldots, m \qquad (3)$$
$$x_j \geq 0$$

Ekstremumo uždaviniai, kai siekiama nustatyti tikslo funkcijos ekstremalią reikšmę esant tam tikriems apribojimams, yra vadinami matematinio programavimo uždaviniais.

Apribojimų sistema (2), (3) aprašo optimizavimo uždavinio **leistinųjų sprendinių sritį**.

Kasdieninėje veikloje dažnai optimizuojama intuityviai, nesinaudojama jokia teorija. Tačiau svarbiais atvejais stengiamasi uždavinį suformuluoti įvertinant visas sąlygas ir jį išspręsti specialiais metodais.

Optimizavimo uždavinių esant ribojimams sprendimo teorija ir metodai yra vadinami matematiniu programavimu. Buvo sukurti metodai optimaliam ekonominių, transporto, karinių programų sudarymui.

Iš optimizavimo užduoties aptarimo matyti, kad norint sėkmingai išspręsti optimizavimo uždavinį, būtina turėti jo matematinį modelį. Todėl toliau aptarsime, kaip sudaryti optimizavimo uždavinio matematinį modelį.

Kaip sudaromas optimizavimo uždavinio matematinis modelis?

Matematinis modelis – tai sistema matematinių išraiškų, kurios aprašo pagrindines modeliuojamo reiškinio savybes, rodiklius ir jų ryšius.

Nuo ko pradėti sudaryti nagrinėjamo uždavinio matematinį modelį?

Bendrų rekomendacijų modelio sudarymui nėra. Procesas yra nestandartinis, kiekvieną kartą gali reikalauti vis kitokio priėjimo, išradingumo ir kūrybingumo. Jo negalima vykdyti pagal šabloną. Vis dėlto kai kuriuos bendrus reikalavimus bandysime suformuluoti.

PIRMA, išsiaiškinti:

- kokį kriterijų tikslinga optimizuoti,

- kokie uždavinio parametrai gali būti keičiami ir kokioje srityje jie gali kisti, t. y., reikia apibrėžti:
  1) kintamųjų vektorių
  2) tikslo funkciją
  3) leistinąją sprendinių sritį.

ANTRA, reikia:

- turėti pakankamai žinių apie nagrinėjamą sritį, kad būtų galima sudaryti algoritmą <u>tikslo funkcijos ir ribojimus apibrėžiančių funkcijų</u> reikšmėms apskaičiuoti.
- remiantis matematinio modelio savybėmis ir optimizacijos teorijos rezultatais parenkamas tinkamas metodas suformuluotam optimizavimo uždaviniui spręsti.

Jei problema yra gerai suformuluota, tai modelio sudarymui yra pasiruošta:

1. išskirti esminiai modeliuojamos situacijos faktoriai,
2. apsispręsta dėl įvairių tipų **kintamųjų skaičiaus ir jų ryšių,**
3. paruošti formaliam užrašymui sistemos **tikslai,**
4. išsiaiškinta, ar yra žinoma **uždavinių klasė**, kuriai būtų galima priskirti nagrinėjamą situaciją.

Matematinio modelio sudarymo planas:

- Kadangi verslo veiklos dalyvių interesai skirtingi, pvz., gamintojas nori gauti didesnį pelną, o vartotojas – pirkti kuo pigiau, todėl formalizuojami veiklos dalyvių interesai, **apibrėžiami kintamieji** ir sudaroma **tikslo funkcija.**
- Planuojant ūkinę veiklą atsižvelgiama į galimybes, taip suformuluojami r**ibojimai**.
- Tada **apribojimai** išreiškiami lygtimis, nelygybėmis ir kt.
- Sudaroma uždavinio **leistinoji sprendinių sritis.**

Modelio sudarymas pradedamas nuo modelio kintamųjų ir jų tipo.

Kas yra modelio kintamieji?

- Modelio nežinomųjų visuma priklauso nuo užduoties formulavimo etape išskirtų esminių faktorių.
- Jie galutinai formalizuojami – išreiškiami kiekybiškai, – pažymimi raidėmis ir susiejami matematinėmis priklausomybėmis.
- **Kintamieji atspindi ieškomą sprendinį.** Pvz., jei norime:
  1) nuspręsti, kiek gaminsime kurių nors produktų, tai kintamieji reikš gamybos apimtis;
  2) jei sprendžiame, kiek pirkti – jie rodys pirkimo apimtis,
  3) jei norime racionaliai nustatyti kainas, kintamieji rodys kainų dydžius;

Apie duomenis...

Duomenų rinkimas ir įvertinimas – ilgas ir nelengvas darbas. Renkant duomenis, naudinga iš anksto žinoti:

1) kurie iš jų ypatingai svarbūs formuluojant ir sprendžiant sudaromą modelį,
2) kurie mažiau įtakoja jo rezultatus.

Kai kurių skaitinių reikšmių gali nereikėti iš viso, užtenka žinoti jų įvertinimus, pokyčio intervalus (teigiamas, mažesnis už vienetą ir pan.). Tai leidžia racionaliau organizuoti duomenų rinkimo darbą.

Apie apribojimus

Nustatant optimalumo kriterijų kartu nustatomos ir sąlygos, kurioms **esant optimalumas privalo būti pasiektas**. Tai apribojančios sąlygos. Pvz., transporto uždavinio sąlygoje siūloma rasti tokią vežimų programą, kuri užtikrintų įmonės mažiausias išlaidas. Optimalumo kriterijus šiuo atveju yra mažiausios išlaidos. Kartu uždavinyje turi būti nurodytos ir kitos uždavinio sąlygos, kurių reikia laikytis, siekiant tikslo funkcija užsibrėžto tikslo. Tai gali būti:

1) ribotas transporto priemonių kiekis,
2) ribotos išlaidos remontui,
3) ribotos degalų sąnaudos,
4) riboti materialiniai ištekliai ir kt.

Kintamųjų neneigiamumas

Kintamųjų neneigiamumo sąlyga rodo, kad įeinantys į matematinį modelį kintamieji turi būti teigiami skaičiai arba lygūs nuliui. Kitaip tariant, ekonominiuose uždaviniuose negali būti neigiamų kintamųjų reikšmių, pvz., staklių, žmonių, transporto priemonių ir t. t.

Kokia gali būti optimalios ūkinės veiklos planavimo uždavinio formuluotė?

Mūsų tikslas yra leistinoje sprendinių srityje rasti kintamųjų rinkinį, su kuriuo **tikslo funkcija** įgyja **optimalią reikšmę**. Jei tikslo funkcija ir apribojimai tiesiniai, tai gauname **tiesinio programavimo uždavinį.**

Tikslo funkcija gali būti:

- maksimizuojama (pvz., didesnis pelnas),
- minimizuojama (pvz., mažesni nuostoliai),
- prilyginama konkrečiai reikšmei (pvz., fiksuotas pelnas).

Kas sudaro optimizavimo uždavinio matematinį modelį?

- tikslo funkcija f(x), išreiškianti pasirinktą optimalumo kriterijų,
- apribojimai,
- ribinės sąlygos.

Tiriamojo objekto matematinis modelis padeda:

1) geriau suvokti nagrinėjamą uždavinį,
2) palyginti skirtingus jo sprendinius,
3) įvertinti vieno kintamojo poveikį kitiems kintamiesiems.

Suformuluoto uždavinio sprendimas

Pirmiausia reikia išsiaiškinti gauto **uždavinio sprendimo metodus ir algoritmus.** Sudarytas modelis ir jį atitinkantis uždavinys priklauso kuriai nors **žinomai uždavinių klasei**, vadinasi, žinomi ir jo **sprendimo metodai.** Gali atsitikti, kad uždavinio formulavime yra kai kurių nestandartinių elementų. Tada tenka ieškoti būdų, kaip juos „standartizuoti“, t. y. pritaikyti prie jau **žinomų sprendimo schemų arba dėl jų modifikuoti** pačius žinomus sprendimo metodus. Jei modelis priklauso žinomai uždavinių klasei, tai paprastai yra prieinamos ir **kompiuterinės jo sprendimo priemonės (programinė įranga),** kurias belieka teisingai pasirinkti ir panaudoti.

Modelio sprendimo etape ar iki jo turi būti:

- surinkti visi reikalingi duomenys,
- įvertintos kintamųjų priklausomybės.

Ar reikalingas sudaryto modelio tyrimo etapas?

- Sudarius modelį, labai svarbu atlikti jo **tyrimą**.
- **Tiriama, ar modelis pakankamai gerai atvaizduoja modeliuojamą situaciją.**
- Modelio sprendiniai **turi teisingai** (pagal pačios modeliuojamos situacijos logiką) **reaguoti į įvairius parametrų ir duomenų pasikeitimus, tikrovėje stebimus reiškinius**.
- Pavyzdžiui:
    1) padidėjus gaminamo produkto paklausai, pelnas turėtų bent jau nesumažėti,
    2) įdiegus pažangesnę, taupesnę gamybos technologiją – padidėti.
- Ypač rūpestingai reikia patikrinti modelio reakciją į „kraštutines“ (esančias ties pačia modelio prielaidų galiojimo riba) parametrų reikšmes.

Optimizavimo uždavinių tipai

Optimizavimo uždavinių tikslo funkcija ir apribojimai gali būti įvairūs. Todėl ir uždaviniai yra skirtingi. Pagal tikslo funkcijos ir apribojimų tipą optimizavimo uždaviniai skirstomi į grupes. Aptarsime keletą jų tipų.

- **Tiesinio programavimo uždaviniai**, kai tikslo funkcija ir visi apribojimai aprašomi tiesinėmis funkcijomis. Sprendimo požiūriu tai patys paprasčiausi optimizavimo uždaviniai. Tokie uždaviniai iškyla kuriant optimalų gamybos su ribotais resursais planą. Pavyzdžiui, nustatant optimalius mitybos racionus. Tokių uždavinių sprendimui tinka universalus simplekso metodas. Praktiniai uždaviniai pasižymi dideliu nepriklausomų kintamųjų kiekiu, todėl jų sprendimui naudojama speciali programinė įranga.

- **Kvadratinio programavimo uždaviniai**, kuriuose tikslo funkcija turi kvadratinę formą, ir visi apribojimai aprašomi tiesinėmis funkcijomis.

- **Dinaminio programavimo uždaviniai** modeliuoja procesą, priklausantį nuo laiko.

- **Netiesinio programavimo uždaviniai**, kai tikslo funkcija f(x) arba bent vienas apribojimas yra netiesinis. Universalių tokių uždavinių sprendimo metodų nėra. Kiekvienu konkrečiu atveju parenkamas sprendimo metodas atsižvelgiant į tikslo funkcijos ir ribojimų tipus.

Kokie yra tiesinio programavimo uždavinio sprendimo metodai?

Pastebėsime, kad optimizavimo uždavinio sprendimas nėra paprastas, todėl mokslininkai ir šiandien nagrinėja šias problemas ir pasiūlo įvairius jų sprendimo metodus.

Kaip išspręsti optimizavimo uždavinį?

1. Parenkamas matematinio modelio sprendimo metodas.
2. Sudėtingiems modeliams analizinių sprendimo metodų nėra.
3. Tada reikia parinkti skaitinį metodą ir sudaryti uždavinio sprendimo algoritmą.
4. Sprendimo algoritmas užrašomas pasirinkta programavimo kalba arba sprendžiamas naudojantis jau esamomis programomis.
5. Atliekami skaičiavimai kompiuteriu (dažnai vykdomi ir lygiagretūs skaičiavimai).
6. Atliekama gautų rezultatų analizė ir testavimas.
7. Prireikus matematinis modelis, skaitinis sprendimo algoritmas yra tikslinami.

Tiesinio programavimo uždavinys yra dažnai naudojamas optimaliems sprendimams priimti. Tokius uždavinius galima spręsti tiek analitiniu, tiek grafiniu būdu. Pabandysime suvokti tokių uždavinių sprendimą, nagrinėdami konkretų pavyzdį.

Jei uždavinys turi daug sprendinių, tada kyla klausimas – **kuris sprendinys geriausias?** Tam reikia nustatyti, pagal **kokį optimalumo požymį** bus renkamas tinkamas rezultatas, t. y., tikslo funkcija.

Tiesinio programavimo uždavinį galima spręsti šiais metodais:

1) analitiniu,

2) grafiniu.

Iš pradžių panaudosime grafinį metodą – bus lengviau suprasti uždavinio sprendimo esmę.

Grafinis uždavinio sprendimas

Grafinio sprendimo ypatumai:

- Vaizdus ir lengviau suprantamas;
- Sprendžiami tik su nedideliu kintamųjų skaičiumi (2 ir 3) uždaviniai;
- Praktiniuose skaičiavimuose *n*-matėje erdvėje figūros nevaizduojamos, nes kintamųjų gali būti daug;
- Optimalūs sprendiniai yra leistinų sprendinių srities viršūnių koordinatės.

Pavyzdys

Duota:

- Nelygybių sistema (apribojimai):

$9x_1 + 5x_2 \leq 45;$

$5x_1 + 28x_2 \leq 140;$

$6x_1 + 7{,}5x_2 \leq 45;$

- Parenkamas optimumo kriterijus, t. y. tikslo funkcija:

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

- Kintamųjų neneigiamumas: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Reikia rasti optimalų sprendinį f.

Kadangi kintamųjų skaičius yra mažas (n = 2), šį uždavinį bandysime išspręsti grafiniu būdu. Optimalaus taško koordinates x_1 ir x_2 nustatysime iš grafiko (1 pav.), tada apskaičiuosime maksimalią tikslo funkcijos f reikšmę.

Uždavinio sprendiniai bus vaizduojami plokštumoje. Kiekviena nelygybė geometriškai nusako pusplokštumę. Kintamųjų neneigiamumo sąlygos nusako pusplokštumes, apribotas tiesėmis $x_1 = 0$ ir $x_2 = 0$.

Pusplokštumių apribota plokštumos sritis (daugiakampis) sudaro leistinųjų sprendinių sritį, kuri yra daugiakampis. To daugiakampio visų taškų koordinatės turi tenkinti uždavinio ribojimų sistemą. Todėl norint patikrinti, ar teisingai nustatyta leistinųjų sprendinių sritis, reikia patikrinti, ar daugiakampio visų viršūnių ir bet kurio vieno vidinio taško koordinatės tenkina uždavinio apribojimų sistemą. Nelygybių sistemos sprendiniai bus taškų, esančių daugiakampyje, koordinatės. Aišku, kad daugiakampyje yra daug taškų, todėl nelygybių sistema turi daug sprendinių.

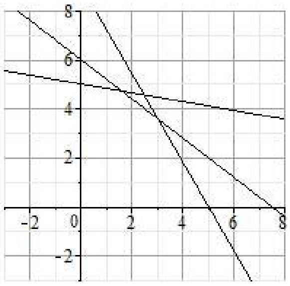
Kuris šios srities taškas bus didžiausia tikslo funkcijos reikšmė? Kitaip sakant, kurio taško koordinatės yra nagrinėjamo taško sprendinys?

Norint tai išsiaiškinti reikia nubraižyti bet kurią tikslo funkcijos lygio tiesę, pvz., $x_1 + x_2 = 0$ ir stumti ją lygiagrečiai tikslo funkcijos didėjimo kryptimi, kol ji ir leistinoji sritis turės bent vieną bendrą tašką. Bandysime panagrinėti tikslo funkciją f. Kadangi ji yra tiesinė, tai vienam kintamajam priskyrus reikšmę 0, antrasis sutampa su funkcijos f reikšme.

Apskaičiuosime tikslo funkcijos reikšmes leistinų sprendinių srities viršūnėse:

1. Taške (0, 0) tikslo funkcija f įgyja reikšmę nulis.
2. Taške (3; 3,6) funkcijos f reikšmė yra 6,6.
3. Taške (1,6; 4,7) funkcijos f reikšmė yra 6,3
4. Taške (0, 5) funkcijos f reikšmė yra 5
5. Taške (5, 0) funkcijos f reikšmė yra 5.

Optimalus sprendinys bus leistinosios srities taškas, kuriame tikslo funkcija f įgyja maksimalią reikšmę. Iš grafiko matome, kad optimalus sprendinys f = 6,6 yra taške (3; 3,6). Pastebime, kad optimalus sprendinys yra leistinų sprendinių srities viršūnėje.



1 pav. Nelygybių sistema.

Grafinio uždavinio sprendimo plokštumoje taisykles galima pritaikyti ir trimatėje erdvėje, kurioje leistinų sprendinių sritis bus daugiabriaunis.

Analitinis uždavinio sprendimas. Simplekso metodo idėja

Analitinio uždavinio sprendimo idėja yra tokia pati, kaip ir grafinio:

1) nuosekliai peržiūrimos leistinų sprendinių srities viršūnės,
2) vienoje iš jų randamas optimalus sprendinys.

Tokių tiesinių uždavinių sprendimui dažniausiai naudojamas simplekso metodas.

Tiesinio programavimo uždavinių analitiniam sprendimui buvo sukurtas **kryptingo viršūnių peržiūrėjimo algoritmas**. Pagal šį algoritmą peržiūros metu nuo vienos viršūnės iki kitos einama tokia kryptimi, kuria tikslo funkcijos reikšmė artėja prie optimalios. Tokia yra simplekso metodo idėja.

Simpleksas (lot. *simplex* – paprastas) yra geometrinė sąvoka, kuria apibūdinamas tam tikro matavimų skaičiaus daugiasienis. Metodas taikomas tiesinio programavimo uždaviniuose, sprendžiant optimizavimo problemas.

Kokia šio metodo idėja?

- *Uždavinio sprendimo idėja – leistinų sprendinių srities viršūnių peržiūrėjimas, vienoje iš kurių yra optimalus sprendinys.*
- Peržiūros metu nuo viršūnės iki kitos einama tokia kryptimi, kuria tikslo funkcijos reikšmė artėja prie optimalios reikšmės.

Algebriniu būdu šis metodas aprašomas optimumų paieška *n*-matėje erdvėje. Tai specialus kryptingo viršūnių peržiūrėjimo algoritmas.

Aptarsime simplekso metodo esmę spręsdami konkretų tiesinio programavimo uždavinį.

Sakykime, duota tikslo funkcija *f*

$$f = 5x + 4y + 3z + g \to max,$$

ir apribojimai

$$\begin{cases} x - 3y - 6g = 11, \\ y + z + 2g = 13, \\ x,\ y,z,\ g \geq 0. \end{cases}$$

Bazinius kintamuosius *x* ir *z* išreiškiame laisvaisiais kintamaisiais *y* ir *g*:

$$\begin{cases} x = 11 + 3y + 6g, \\ z = 13 - y - 2g. \end{cases}$$

Perskaičiuojame tikslo funkcijos ir laisvųjų kintamųjų **įvertinimo reikšmes** bei sudarome simplekso lentelę:

$$ff = 5 \cdot 11 + 3 \cdot 13 = 94,$$
$$yy = 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 4 = -16,$$
$$gg = 5 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 - 1 = -25.$$

Pradinis atraminis sprendinys nėra optimalus, nes *f* eilutėje yra neigiamų įvertinimų:

	- y	-g	sprend.
x =	-3	-6	11
z =	1	2	13
f =	-16	-25	94

Pagal mažiausią neigiamą įvertinimą pasirenkame *g* stulpelį. Pagal mažiausią simplekso santykį pasirenkame antrą eilutę.

Sukeitę bazinį kintamąjį *z* ir laisvąjį kintamąjį *g* vietomis bei atlikę tam tikrus skaičiavimus, gauname naują simplekso lentelę:

	-.y	-.z	sprend
x =	0	3	50
g =	1/2	1/2	13/2
f =	-7/2	25/2	513/2

Atraminis sprendinys vėl nėra optimalus, nes *f* eilutėje dar yra neigiamas įvertinimas.

Pagal mažiausią neigiamą įvertinimą pasirenkame antrąjį stulpelį. Pagal mažiausią simplekso santykį pasirenkame antrą eilutę.

Sukeitę bazinį kintamąjį *g* ir laisvąjį kintamąjį *y* vietomis bei atlikę tam tikrus skaičiavimus, gauname naują simplekso lentelę:

	-.g	- z	sprend
x =	0	3	50
y =	2	1	13
f =	7	16	302

Dabar jau *f* eilutėje nebeliko neigiamų įvertinimų, tad ši lentelė nusako optimalų sprendinį:

$$x^0 = (50,13,0,0), \ f(x^0)_{max} = 302.$$

Šiuo metu tokių uždavinių sprendimą palengvina kompiuterinės matematikos sistemos, kuriose yra specialios komandos optimizavimo uždaviniams spręsti.

Ankščiau spręstą uždavinį galima išspręsti kompiuterinės matematikos sistemos MAPLE komandomis:

```
[> restart;
with(plots);
with(simplex);
sistema := {x-3*y-6*g = 11, y+z+2*g = 13};
funkcija := 5*x+4*y+3*z+g;
salygos := {g >= 0, x >= 0, y >= 0, z >= 0};
sprend := maximize(funkcija, `union`(sistema, salygos));
f := 5*sprend[2]+4*sprend[3]+3*sprend[4]+sprend[1];
```

$$sistema := \{x - 3y - 6g = 11, y + z + 2g = 13\}$$

$$funkcija := 5x + 4y + 3z + g$$

$$salygos := \{0 \le g, 0 \le x, 0 \le y, 0 \le z\}$$

$$sprend := \{g = 0, x = 50, y = 13, z = 0\}$$

$$f := 5x + 4y + 3z + g = 302$$

Pastebime, kad gavome tą patį optimalų sprendinį kaip ir ankščiau spręsdami.

Koks praktinis optimizavimo uždavinių sprendimas?

Optimizavimo uždavinių sprendimas yra aktualus įvairiose srityse. Todėl XXI a. optimalūs sprendiniai nėra ieškomi popieriaus lape su rašikliu. Šiuo metu yra daug specializuotos programinė įrangos, palengvinančios optimizavimo uždavinių sprendimą.

Paprasčiausias būdas yra panaudoti elektronines lenteles – jos patogios, nes pakanka žinoti pagrindinius tokių uždavinių sprendimo principus ir jų aprašymo priemones. Sprendinių paiešką galima atlikti automatiškai, naudojantis „Microsoft Excel" sprendimo priedu „Solver".

Uždavinys sprendžiamas keliais etapais:

- Sukuriamas uždavinio sprendimo matematinis modelis
- Sukuriamas algoritmas modeliui realizuoti
- Algoritmas realizuojamas specialia komanda
- Randamas sprendinys
- Vykdoma optimalaus sprendinio analizė
- Vykdomas sprendimo priėmimas

Kokia programine įranga galima realizuoti kompiuterinį modelį?

Optimizavimo metodų bei juos realizuojančios programinės įrangos kūrimas yra aktyviai plėtojama mokslo ir technikos šaka. Programinės įrangos rinkoje egzistuoja daug komerciškai platinamų bei nemokamų programinių produktų, kurie skirti optimizavimo uždaviniams spręsti. Renkantis programinės įrangos kūrimo priemonę optimizavimo uždaviniams realizuoti naudinga būtų atsižvelgti į jos naudojimo patogumą ir naujumą. Pavyzdžiui, daug nedidelių tiesinio (ir ne tik tiesinio) programavimo uždavinių galima spręsti netgi paprastomis „Microsoft Excel" priemonėmis, o didesniems ir sudėtingesniems panaudoti kompiuterines matematikos sistemas: pvz., SAS, R, MAPLE, MATLAB, SPSS ir kt.

Microsoft Excel

- Nedideliems tiesinio programavimo uždaviniams spręsti gerai tiks „Microsoft Excel" skaičiuoklės priedas **„Solver".**
- Jį rasime valdymo meniu grupėje **„Duomenys".**
- Prieš kviesdami **„Solver",** turime parengti mūsų uždavinį atitinkančią „Excel" lentelę.
- Be sprendinio, priedas **„Solver"** papildomai pateikia ir nemažai po optimizacinės analizės elementų. Juos pateikia darbalapiuose *Answer Report*, *Sensitivity Report* ir *Limits Report*, kuriuos pats ir suformuoja.

„Maple" galimybės optimizavimo uždaviniams spręsti

Trumpai aptarsime „Maple" sistemos galimybes:

- Paketas „Simplex"
- Paketas „Plots": funkcija *inequal()*
- Paketas „Optimization"

„Simplex" paketo galimybės sistemoje „Maple":

- Galima grafiškai pavaizduoti sistemas, kurios turi iki trijų kintamųjų;
- Yra daug pagalbinių komandų su paaiškinimais;
- Pakete yra nemažai pavyzdžių, kaip spręsti šiuo metodu;

- Yra galimybė sugrupuoti kintamuosius norima tvarka;
- Trūkumas – nepateikiama sprendimo eiga.

Tiesinio programavimo uždavinio pavyzdys „Maple“ sistemos paketu „Optimization“

[> with(Optimization);

*sistema := {x-3*y-6*g = 11, y+z+2*g = 13};*

*funkcija := 5*x+4*y+3*z+g;*

salygos := {g >= 0, x >= 0, y >= 0, z >= 0};

LPSolve(funkcija, sistema, assume = nonnegative, maximize);

$$sistema := \{x - 3\,y - 6\,g = 11, y + z + 2\,g = 13\}$$

$$funkcija := 5\,x + 4\,y + 3\,z + g$$

$$salygos := \{0 \leq g, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$$

$$[302.000000000001, [g = 0., x = 50.0000000000001, y = 13., z = 0.]]$$

Pastebime, kad ir kitu „Maple“ sistemos paketu anksčiau spręstas uždavinys formuoja tą patį atsakymą.

Matematinio modelio sudarymo ir jo realizavimo „Maple“ sistema pavyzdys

Duota sąlyga:

- Nustatyti, koks turi būti gaminamas 4 rūšių produkcijos P1, P2, P3, P4 kiekis, jeigu kiekvienai produkcijos rūšiai reikalingi trejopi ištekliai: darbas, žaliava, finansai. Išteklių kiekis, reikalingas produkcijos vieneto pagaminimui, vadinamas sąnaudų norma.
- Sąnaudų normos ir pelnas, gaunamas už kiekvieną produkcijos vienetą, bei turimų išteklių kiekis nurodyti lentelėje:

Išteklių rūšis	P1	P2	P3	P4	Ženklas	Kiekis
Pelnas	60	70	120	130	max	
Darbas	1	1	1	1	<=	16
Žaliavos	6	5	4	3	<=	110
Finansai	4	6	10	13	<=	100

Optimaliame sprendinyje galimi du atvejai:

1) produkcija gaminama, kintamųjų reikšmės teigiamos;
2) produkcija negaminama, kintamųjų reikšmės lygios nuliui.

Nustačius optimalumo kriterijumi pelną, sudarome sistemą

$$\begin{cases} F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; \end{cases}$$

Čia x_j yra *j*-osios produkcijos kiekis.

Gautos sistemos grafiškai neįmanoma išspręsti, nes yra 4 kintamieji. Todėl bandysime išspręsti „Maple“ sistema:

```
[> with(plots);
with(simplex);
 n1 := x1+x2+x3+x4 <= 16;
 n2 := 6*x1+5*x2+4*x3+3*x4 <= 110;
 n3 := 4*x1+6*x2+10*x3+13*x4 <= 100;
sistema := {n1, n2, n3};
funkcija := 60*x1+70*x2+120*x3+130*x4;
salygos := {x1 >= 0, x2 >= 0, x3 >= 0, x4 >= 0};
sprend := maximize(funkcija, sistema union salygos));
a := readstat(`iveskite koeficienta a= `)
f:=a*sprend[1]+70*sprend[2]+120*sprend[3]+130*sprend[4]
```

$$sprend := \{x1 = 10, x2 = 0, x3 = 6, x4 = 0\}$$
$$f := 60\,x1 + 70\,x2 + 120\,x3 + 130\,x4 = 1320$$

Rezultatų aptarimas:

- Iš gautų rezultatų išplaukia, kad optimalus sprendinys bus toks:

kai $x1 = 10$, $x2 = 0$, $x3 = 6$, $x4 = 0$, tai tikslo funkcija $f = 1320$;

- Radome optimalų sprendinį – tai tik pirmas etapas;
- Toliau reikia vykdyti uždavinio analizę:

1. Tirti tikslo funkcijos koeficiento pakeitimo įtaką;
2. Tirti išteklių apribojimo pakeitimo įtaką.

Literatūra

1. Žilinskas K. Matematinis programavimas, I dalis. Tiesinis programavimas, VŠĮ Šiaulių universiteto leidykla, 2007.
2. Kalanta. S. Taikomosios optimizacijos pagrindai, Vilnius: Technika, 2003.
3. Stungurienė S. Verslo matematika, Vilnius, TEV, 2008.